やさしく触れる大学の数学

Souta

はじめに

本書は大学で数学を専攻すると、学部 3 年生までに習うであろう分野をかんたんに紹介します。大学で勉強する数学は、高校で学習したものと雰囲気が全く異なります。今まで曖昧に扱っていた概念 (極限や実数の定義など) を一から厳密に定義することになります。それを楽しいと思える方は数学科に行くべきですし、高校数学のほうが面白いと思われる方は、別の学問を研究すればよいでしょう。本書は大学で数学を学ぶことに興味のある方の道標になれればいいなと思っております。大学数学の分野は広大です。もし自分に合わない、あるいは難しいと感じた分野は飛ばして構いません (それぞれの章は独立しています)。参考までに、それぞれの分野が実際の社会にどのように応用されているかについても記述しておきました。皆さんが面白いと思える分野に出会えることを祈っております。

目次

第 I 部

数学基礎

第 1 章

積分

1.1　広義積分

広義積分とは、定積分の範囲が有限ではなく、無限の範囲を含むような積分を指します。具体的には、以下のような形式の積分を指します。

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_\infty^a f(x)dx, \quad \int_\infty^\infty f(x)dx$$

ここで、$f(x)$ は広義積分の被積分関数であり、a は定積分の範囲を表します。広義積分において、被積分関数が無限大に発散する場合や、積分範囲が無限大である場合には、収束しない場合もあります。

広義積分の主要な定理として、収束判定定理、比較判定定理、絶対収束定理があります。これらの定理を用いることで、広義積分の収束性を判定することができます。

収束判定定理は、広義積分が収束するための必要条件を与えます。被積分関数 $f(x)$ が広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ において収束するためには、次の条件を満たす必要があります。

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx \text{ が収束する}$$

比較判定定理は、被積分関数 $f(x)$ の収束性を別の関数 $g(x)$ と比較する

ことで判定する定理です。$f(x)$ と $g(x)$ が次の条件を満たす場合、広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ が収束する場合、$\int_a^\infty g(x)dx$ も収束することが証明できます。

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ かつ } \int_a^\infty g(x)dx \text{ が収束する}$$

絶対収束定理は、広義積分の絶対収束性について与えられた定理です。被積分関数 $f(x)$ が広義積分 $\int_a^\infty |f(x)|dx$ において収束する場合、広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ も収束することが証明できます。

広義積分において、問題としてよく取り上げられるのが、収束しない場合です。収束しない場合には、被積分関数が無限大に発散するため、積分値が存在しません。この場合には、広義積分の発散といいます。

収束する場合には、広義積分の積分値を求めることができます。具体的には、広義積分を定義に従って積分し、極限を求めます。例えば、広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ は、次のように定義されます

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim t \to \infty \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$$

したがって、広義積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ の積分値は 1 となります。

練習問題として、以下の広義積分の収束性を判定し、収束する場合には積分値を求めてください。

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx$
2. $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$
3. $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \quad (p > 1)$

広義積分は、物理学や経済学、工学など様々な分野で応用されています。例えば、物理学においては、運動エネルギーやポテンシャルエネルギーなどのエネルギーを表す積分に広義積分が用いられます。また、確率

論においては、確率密度関数を表す積分に広義積分が用いられます。広義積分の応用は広範囲にわたり、数学的な概念として重要な役割を果たしています。

1.2 重積分

重積分とは、2 つ以上の変数を持つ関数の積分を扱うものであり、通常の積分と同様に、積分範囲と被積分関数を指定します。ただし、積分範囲が領域となります。

2 変数の場合を考えてみましょう。領域 D 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ について、D 上での重積分は以下のように定義されます。

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

ここで、$dxdy$ は面積要素を表します。D は、平面内の領域であり、積分範囲は、D を囲む境界線で指定されます。つまり、積分範囲が領域であるため、領域の形状によっては、重積分を計算するために累次積分が必要となります。

例えば、領域 D が三角形である場合、D 上での重積分は以下のように累次積分で表されます。

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dxdy$$

ここで、$c(x)$ と $d(x)$ は、D の境界線での x の値に対応する y の範囲を表します。

重積分においても、単調収束定理や優収束定理などが成り立ち、積分値の収束性を判定することができます。また、累次積分においても、変数の順序を入れ替えることができますが、被積分関数が連続である場合に限ります。このとき、フビニの定理と呼ばれる定理が成り立ちます。

練習問題として、以下の重積分を計算してください。

1. $\iint_D xy^2dxdy$、ただし D は $x=0$、$y=0$、$y=x$ で囲まれた領域
2. $\iint_D (x+y)dxdy$、ただし D は $x+y \leq 1$、$x \geq 0$、$y \geq 0$ で囲まれた領域

重積分は、物理学や経済学、工学など様々な分野で応用されています。例えば、物理学においては、体積や質量などの物理量を表す積分に重積分が用いられます。また、工学分野では、密度や電荷分布などの場合にも、重積分がよく用いられます。さらに、経済学においては、需要曲線や供給曲線の交点における均衡価格を求めるために、重積分が用いられます。

累次積分は、重積分の計算に必要な手法であり、多変数関数の微積分において非常に重要な役割を果たします。また、累次積分は、微分方程式や偏微分方程式を解く際にも用いられます。例えば、ヘルムホルツの波動方程式の解析解を求めるために、累次積分が用いられることがあります。

練習問題の解答は以下の通りです。

1. $\iint_D xy^2dxdy = \int_0^1 \int_0^x xy^2dydx = \frac{1}{12}$
2. $\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)dydx = \frac{1}{2}$

したがって、重積分の計算は、累次積分を用いて行われます。また、重積分は、物理学や工学、経済学など様々な分野で応用されています。

1.3　ヤコビアン

ヤコビアンは、多変数関数の微積分において重要な役割を果たす概念です。ヤコビアンは、ある座標系から別の座標系への変換における微小面積の変化率を表します。

例えば、2 変数関数 $f(x,y)$ の微積分を考える場合、座標系 (x,y) から座標系 (u,v) への変換が行われたとします。このとき、(u,v) 上の微小面積 $dudv$ と、(x,y) 上の微小面積 $dxdy$ の間には次のような関係が成り立

ちます。

$$dxdy = |J|\, dudv \tag{1.1}$$

ここで、J はヤコビアン行列と呼ばれ、次のように定義されます。

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

この行列式 $|J|$ をヤコビアンと呼びます。ヤコビアンが正の場合、座標系 (x, y) から (u, v) への変換は面積を拡大する変換であり、ヤコビアンが負の場合は面積を縮小する変換であることを意味します。

ヤコビアンは、多変数関数の変数変換公式において重要な役割を果たします。例えば、2 変数関数 $f(x, y)$ を (u, v) に変数変換する場合、次の式が成り立ちます。

$$\iint f(x, y) dxdy = \iint f(u, v)\, |J|\, dudv \tag{1.3}$$

この式は、座標系の変換によって面積要素がどのように変化するかを表しています。ヤコビアンを使うことで、多変数関数の微積分を異なる座標系で計算することができます。

また、ヤコビアンは確率密度関数の変数変換にも使われます。例えば、2 変数の確率密度関数 $p(x, y)$ を (u, v) に変数変換する場合、次の式が成り立ちます。

$$p(u, v) = p(x, y)\, |J|^{-1} \tag{1.4}$$

ここで、$|J|$ はヤコビアンであり、$|J|^{-1}$ は逆ヤコビアンと呼ばれます。逆ヤコビアンは、確率密度関数の変数変換において、確率密度の変化を表す重要な量です。

さらに、ヤコビアンは微分幾何学や制御理論などの分野でも重要な役割を果たします。ヤコビアンの性質や応用は、数学や物理学、工学などの多様な分野で用いられます。

次の練習問題を解いてみてください。

1. $f(x,y)=xy^2$ を $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ で変数変換したときのヤコビアンを求めよ。
2. 二次元正規分布の確率密度関数 $p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$ を、(r,θ) に変数変換する場合の逆ヤコビアンを求めよ。

ヤコビアンは、物理学や工学の分野でも広く使われています。例えば、流体力学の分野では、座標系の変換によって流体の速度や圧力などの変化を計算するために、ヤコビアンを使います。また、制御理論の分野では、システムの状態遷移における座標系の変換によって、システムの動きを解析するために、ヤコビアンを使います。さらに、機械学習の分野でも、確率分布の変換において、逆ヤコビアンを使って、変換後の分布の確率密度を計算することがあります。

1.4　畳み込み積分

畳み込み積分とは、2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の一部分を積分することによって、2 つの関数を畳み込む操作を表します。畳み込み積分は、信号処理、画像処理、機械学習など、多くの分野で使用される重要な概念です。

畳み込み積分は、次のように定義されます。

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

この式は、$f(t)$ と $g(x-t)$ の積の範囲 ($-\infty$ から ∞ まで) を積分したものを表しています。畳み込み積分の結果は、関数 f と g の類似度を表し、2 つの関数が似ている場合、畳み込み積分の値は大きくなります。

畳み込み積分の主要な定理には、可換律、結合律、分配律があります。これらの定理により、畳み込み積分は、多くの場合、計算を簡略化することができます。

畳み込み積分に関連する実例として、畳み込みニューラルネットワーク (Convolutional Neural Network, CNN) が挙げられます。CNN は、画像処理において、畳み込み層とプーリング層から構成される人工ニューロンネットワークです。畳み込み層は、畳み込み積分を用いて、画像のフィルタリングを行います。プーリング層は、画像をサイズダウンして、処理の高速化と特徴の抽出を行います。CNN は、画像認識、音声認識、自然言語処理などの分野で広く利用されています。

畳み込み積分の練習問題をいくつか挙げます。

1. 次の畳み込み積分を計算してください。
   $(f * g)(x) = \int_{-1}^{1} (2t+1)(3x-2t)dt$
2. 関数 $f(x) = 2x+1$ と $g(x) = x^2$ について、畳み込み積分 $(f*g)(x)$ を求めてください。
3. 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が畳み込み可能であるとき、畳み込み積分 $(f * g)(x)$ はどのように計算されますか？また、畳み込み可能である条件について説明してください。

畳み込み積分は、信号処理や画像処理において、異なるフィルタリング方法を組み合わせて、より高度な処理を実現するために使用されます。例えば、画像処理において、畳み込み積分を用いて、エッジ検出、ノイズ除去、画像の平滑化などを行うことができます。また、畳み込みニューラルネットワークは、画像認識、音声認識、自然言語処理などの分野で広く利用されています。畳み込み積分は、実世界の多くの問題に応用されており、現代科学技術の発展に欠かせない重要な概念です。

第 2 章

微分方程式

2.1　線形微分方程式

線形微分方程式とは、未知関数が 1 次の微分のみで表される微分方程式のことです。例えば、以下の形式の方程式が線形微分方程式です。

$$y'' + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

ここで、$p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ は与えられた関数です。$y(x)$ は未知関数であり、$y'(x)$ は $y(x)$ の 1 次導関数、$y''(x)$ は 2 次導関数です。

線形微分方程式には、初期値問題と境界値問題の 2 つの種類があります。初期値問題は、$y(x)$ とその 1 次導関数 $y'(x)$ の初期値が与えられた問題です。境界値問題は、$y(x)$ がある範囲での値が与えられた問題です。

主要な定理としては、解の存在と一意性定理があります。この定理により、適切な条件が与えられれば、線形微分方程式の解は一意に存在することが保証されます。

また、線形微分方程式の解法としては、定数変化法、特殊な形式の解法、および解の一般形の決定法などがあります。これらの解法は、異なる種類の線形微分方程式に対して適用されます。

以下は練習問題の例です。

1. 次の線形微分方程式を解いてください。
   $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$
2. 次の初期値問題を解いてください。
   $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
3. 次の境界値問題を解いてください。
   $y''(x) + y'(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

2.2　非線形微分方程式

非線型常微分方程式とは、未知関数が非線型の微分方程式のことです。1 階非線型常微分方程式と 2 階非線型常微分方程式について解説します。

1 階非線型常微分方程式は、以下のような形式を持ちます。

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ここで、$f(x, y(x))$ は未知関数 $y(x)$ に依存する関数です。この方程式は、通常、解析的な解法を持たず、数値解法を用いて解く必要があります。

2 階非線型常微分方程式は、以下のような形式を持ちます。

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

ここで、$f(x, y(x), y'(x))$ は未知関数 $y(x)$ およびその 1 次導関数 $y'(x)$ に依存する関数です。2 階非線型常微分方程式は、非常に一般的な形式を持つため、多くの物理学や工学の問題で使用されます。例えば、運動方程式、振動現象、熱伝導などが挙げられます。

非線型常微分方程式の解法は、一般に解析的な方法が存在しません。しかし、数値解法を用いることで、近似的な解を得ることができます。代表的な数値解法には、オイラー法、ルンゲ・クッタ法、アダムス法などがあります。

以下は練習問題の例です。

1. 次の 1 階非線型常微分方程式を解いてください。
   $y'(x) = x^2 + y^2$
2. 次の 2 階非線形常微分方程式を解いてください。
   $y''(x) + y(x)^2 = 0$

非線型常微分方程式は、物理学や工学の分野で広く使用されています。例えば、航空宇宙工学や構造力学において、非線型常微分方程式を使用して構造物の振動特性を分析することがあります。また、量子力学や相対論においても、非線型常微分方程式が使用されます。最近では、機械学習やニューラルネットワークの分野でも、非線型常微分方程式が注目を集めています。

2.3　偏微分方程式

偏微分方程式は、物理学や工学、経済学などの様々な分野で重要な役割を果たしています。この節では、偏微分方程式のうち、楕円型、双曲型、放物型、非線形偏微分方程式について解説し、それぞれの特徴や定理、実例、問題、そして応用について説明します。

2.3.1　線形偏微分方程式

楕円型偏微分方程式

楕円型偏微分方程式は、例えば、電位分布や温度分布、流体の静止状態などを表現するのに用いられます。一般に、解析的な解を求めることが難しいため、数値解法がよく用いられます。代表的な楕円型偏微分方程式としては、ポアソン方程式があります。

ポアソン方程式:

$$\Delta u = f$$

ここで、Δ はラプラシアン演算子を表し、f は与えられた関数、u は求めるべき未知関数です。この方程式には、次のような性質があります。

1. 境界値問題の解を与えることができる。
2. 複数の解を持つ場合がある。
3. 解が存在しない場合がある。

楕円型偏微分方程式には、有限要素法や境界要素法などの数値解法がよく用いられます。

双曲型偏微分方程式

双曲型偏微分方程式は、波動現象を表現するのに用いられます。例えば、音波や電磁波、水波などが双曲型偏微分方程式で表されます。双曲型偏微分方程式には、解析的な解が存在する場合がありますが、一般には数値解法が用いられます。代表的な双曲型偏微分方程式としては、波動方程式があります。

波動方程式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ここで、u は波動の振幅を表し、t は時間、x は空間座標、c は波動の速度です。この方程式には、次のような性質があります。

1. 初期値問題の解を与えることができる。
2. 一意な解を持つ場合がある。

双極型偏微分方程式には、波動現象以外にも、拡散現象や放射現象を表現することができます。

放物型偏微分方程式

放物型偏微分方程式は、拡散現象や熱の伝導現象を表現するのに用いられます。一般に、解析的な解を求めることは難しいため、数値解法がよく用いられます。代表的な放物型偏微分方程式としては、熱伝導方程式があります。

熱伝導方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ここで、u は温度を表し、t は時間、x は空間座標、k は熱伝導率です。この方程式には、次のような性質があります。

1. 初期値問題の解を与えることができる。
2. 解が一意である。
3. 解が安定である。

放物型偏微分方程式には、有限差分法や Crank-Nicolson 法などの数値解法がよく用いられます。

2.3.2　非線形偏微分方程式

非線形偏微分方程式は、物理学や工学などの様々な分野で現れます。一般に、解析的な解を求めることは難しいため、数値解法がよく用いられます。代表的な非線形偏微分方程式としては、バーガース方程式があります。

バーガース方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ここで、u は流体の速度を表し、t は時間、x は空間座標、ν は動粘性係数です。この方程式には、次のような性質があります。

1. 初期値問題の解を与えることができる。
2. 解が存在しない場合がある。
3. 解が安定である場合がある。

以下に練習問題を挙げます。

1. 次の偏微分方程式のうち、どれが楕円型、どれが双曲型、どれが放物型であるか判定してください。
   (a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
   (b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
   (c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
   (d) $u_t = \dfrac{1}{2}u_{xx} - uu_x$
2. 熱伝導方程式の初期値問題を有限差分法を用いて解いてください。

偏微分方程式は、自然現象や社会現象をモデル化するのに有用です。たとえば、熱伝導方程式は、材料の熱伝導率を求めるのに利用されます。また、波動方程式は音響の伝搬を、シュレディンガー方程式は量子力学の粒子の挙動を、拡散方程式は物質の拡散現象をモデル化するのに利用されます。さらに、非線形偏微分方程式は、生物学や社会科学の現象をモデル化するのにも利用されます。

偏微分方程式の数値解法は、現代科学技術においても欠かせない技術の一つです。たとえば、航空機の設計には、CFD（Computational Fluid Dynamics）と呼ばれる流体解析が利用されます。CFD では、非線形偏微分方程式を数値的に解くことで、空気の流れや圧力の分布を予測することができます。また、物質の合成や物質の性質の予測にも偏微分方程式が利用されます。近年では、機械学習を組み合わせた偏微分方程式の解法も注目されています。

第 3 章

代数系

3.1 群

まずはじめに、群について説明します。群とは、演算の集合に対して、演算が結合法則、単位元、逆元を持つことができるものです。具体的には、以下のような性質を持ちます。

定義 3.1.1. 集合 G が群であるとは、演算 $\cdot$ が以下の性質を満たすことをいう。

1. 結合法則: $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. 単位元の存在: $\exists e \in G, \forall a \in G, a \cdot e = e \cdot a = a$.
3. 逆元の存在: $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

群は、数学的構造の中でも非常に重要な概念であり、多くの分野で応用されています。例えば、群論は、代数学や数論などの分野で重要な道具として使われています。また、群は、物理学や化学などの自然科学の分野でも応用されており、量子力学や分子構造などの研究にも関連しています。

3.1.1　主要な定理

群に関する主要な定理としては、以下のものがあります。

定理 3.1.1 (ラグランジュの定理)**.** G を有限群、H を G の部分群とする。このとき、H の位数は G の位数の約数である。

定理 3.1.2 (群の同型定理)**.** G, H を群とする。写像 $f : G \to H$ が群同型であるためには、f が以下の条件を満たす必要がある。

1. f は全単射である。
2. $\forall a, b \in G, f(ab) = f(a)f(b)$.

このとき、G と H は群として同型であるといい、$G \cong H$ と表記する。

3.2　環

定義 3.2.1. 集合 R が環であるとは、以下の *3* つの条件を満たすことである。

1. $(R, +)$ がアーベル群であること。すなわち、$+$ が結合的、可換的、単位元 $0 \in R$ を持ち、任意の元 $a \in R$ に対して、$-a$ が存在して $a + (-a) = 0$ となること。
2. $(R, \cdot)$ がモノイドであること。すなわち、$\cdot$ が結合的であり、単位元 $1 \in R$ を持つこと。
3. 乗法が分配法則を満たすこと。すなわち、任意の $a, b, c \in R$ に対して、以下の *2* つの条件を満たすこと。

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ (b + c) \cdot a \qquad = b \cdot a + c \cdot a$$

ここで、$a, b, c \in R$ について、$a + b$ は $+$ による和、$a \cdot b$ は $\cdot$ による積を表す。

この定義によれば、環は、和と積の 2 つの演算が定義され、それぞれアーベル群とモノイドの条件を満たし、かつ乗法が分配法則を満たすような集合であることがわかります。

定理 3.2.1 (多項式剰余環の構成定理)**.** F を体とし、$F[x]$ を F 上の多項式環とする。$f(x) \in F[x]$ をモニックな多項式（つまり、最高次の係数が 1 である多項式）とする。このとき、$f(x)$ を割り算した余りによって定まる剰余環 $F[x]/(f(x))$ は環である。

3.2.1　練習問題

以下の問題に取り組んでみてください。

練習問題 3.2.1. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ が環であることを示せ。

練習問題 3.2.2. 多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ の部分環として、$f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) \in \mathbb{Z}$ を考える。この部分環が環であることを示せ。

3.3　体

最後に、体について説明します。体とは、加法と乗法の二つの演算を持ち、それぞれがアーベル群となっている集合です。具体的には、以下のような性質を持ちます。

定義 3.3.1. 集合 F が体であるとは、演算 $+$ と $\cdot$ が以下の性質を満たすことをいう。

1. $(F, +)$ はアーベル群である。
2. $(F \setminus 0, \cdot)$ はアーベル群である。
3. 分配法則が成り立つ。

体は、数学的構造を研究する上で非常に重要な役割を持っています。例えば、代数幾何学や数論などの分野で頻繁に登場します。また、体は、物理学や工学などの自然科学分野でも広く利用されています。

3.3.1　主要な定理

体に関する主要な定理としては、以下のものがあります。

定理 3.3.1 (代数的閉体の存在)**.** 任意の代数的拡大体は、代数的に閉じた拡大体を含む。

定理 3.3.2 (有限体の構成定理)**.** 素数 p と正の整数 n に対して、p^n 個の元を持つ有限体がただ一つ存在する。

3.3.2　練習問題

以下の問題に取り組んでみてください。

練習問題 3.3.1. 体 $\mathbb{Q}$ の部分環として、$\mathbb{Z}$ が環であることを示せ。

練習問題 3.3.2. 体 F 上の n 次多項式 $f(x)$ が、F 上の根を持つための必要十分条件は何か。

3.4　応用

群、環、体は、数学的構造を研究する上で基本的な役割を果たしています。例えば、環や体は、代数幾何学や数論などの分野で頻繁に登場します。また、群は、幾何学や物理学などの自然科学分野でも広く利用されています。

群や環を用いることで、対称性や変換などの概念を形式化することができます。これにより、幾何学的問題や物理学的問題を代数的に解くことが

できるようになります。

　また、体は、数値計算や暗号理論などの分野でも広く利用されています。例えば、有限体を用いた暗号化方式は、現代の暗号化技術の基礎となっています。

　以上のように、群、環、体は、数学的構造を研究する上で不可欠な役割を果たしています。また、これらの概念は、物理学や工学、情報科学などの応用分野でも広く利用されています

第 II 部

数学一般

第 4 章

代数学

4.1　ガロア理論

ガロア理論は、体の拡大やその拡大体に対応する群の性質を研究する理論です。ガロア理論は、19 世紀にフランスの数学者であるエヴァリスト・ガロアによって創始されました。

体の拡大とは、与えられた体 F に対して、新しい元を含むように拡張した体 L を考えることです。体の拡大において重要な概念の一つが、冪根拡大です。a を F の元とするとき、a の n 乗根が L に含まれるように拡大することを冪根拡大といいます。

ガロア理論において、体の拡大 L/F に対して、L における F の元の自己同型写像全体のなす群を L/F のガロア群と呼びます。ガロア群は、体の拡大の性質を捉えるために非常に重要な概念であり、その性質によって拡大の自己同型写像を研究することができます。

代数方程式の根を求める問題は、代数学の中でも古くから研究されてきました。その中でも、代数方程式の一般的な解法が存在しないことを示す Abel-Ruffini の定理は、ガロア理論の重要な応用例です。この定理は、5 次以上の代数方程式に対して、一般にはその根を求めることができないことを主張します。この定理の証明は、ガロア理論の手法を用いたもので、

特に、ガロア群が可解群であるかどうかという性質を用いています。

以上が、ガロア理論の概要です。以下に、練習問題をいくつか提供します。

1. 体 $F = \mathbb{Q}$ に対して、$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ のガロア群を求めよ。
2. F を体とし、$f(x) \in F[x]$ を F 上の不分解多項式とする。L を $f(x)$ の分解体とし、K を L の F 上の部分体で L を含む最小の体とする。このとき、L/K のガロア群を求めよ。
3. $F = \mathbb{Q}$ とし、L を $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ の体とする。ただし、ζ_3 は 3 次の 1 の原始根である。このとき、$L/\mathbb{Q}$ のガロア群を求めよ。

これらの問題はかなり難解なので、ヒントを提供します。

1. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の元は、一般に $a + b\sqrt{2}$ と表すことができます。ここで、$a, b \in \mathbb{Q}$ です。L の自己同型写像は、$\sigma : L \to L$ であって、以下を満たすものです。
$$\sigma(a + b\sqrt{2}) = a \pm b\sqrt{2}$$
ただし、$\pm$ はそれぞれの自己同型写像に対応します。これらの写像を考えると、$L/\mathbb{Q}$ のガロア群は、位数 2 の群であることがわかります。
2. $f(x)$ の根を L の元として取ると、L/F は $f(x)$ の分解体になります。一方、K は L を含む最小の体であるため、K は $f(x)$ の最小分解体になります。L/K の次数を d とすると、$f(x)$ が不分解多項式であることから、d は $f(x)$ の分解体の中で最小の値となります。ここで、L/F のガロア群を G とすると、K/F のガロア群は、G の部分群になります。具体的には、K/F の自己同型写像は、L/F の自己同型写像のうち、K を不変に保つものになります。したがって、K/F のガロア群は、G の不変部分群になります。つまり、K/F のガロア群は、G の正規部分群になります。このようにして、L/F のガロア群から、K/F のガロア群を求めることができます。

3. $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$ の元は、一般に $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\zeta_3 + e\zeta_3^2$ と表すことができます。ここで、$a, b, c, d, e \in \mathbb{Q}$ です。$L/\mathbb{Q}$ のガロア群は、以下の自己同型写像の集合で構成されます。σ_i $(i = 1, 2)$ と τ によって生成される群です。これらの自己同型写像は、以下のように定義されます。

$$\sigma_1 : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}, \quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3,$$
$$\sigma_2 : \sqrt[3]{2} \mapsto \zeta_3\sqrt[3]{2}, \quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3,$$
$$\tau : \sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}, \quad \zeta_3 \mapsto \zeta_3^2.$$

これらの自己同型写像は、それぞれ L の元を L の元に写し、かつ L の元を互いに写し合うように定義されています。したがって、σ_1, σ_2, τ は L の自己同型写像であり、$L/\mathbb{Q}$ のガロア群を生成します。また、σ_1 と σ_2 は位数 3 の巡回群を生成し、τ は位数 2 の群を生成します。したがって、$L/\mathbb{Q}$ のガロア群は、位数 6 の群であり、非アーベル群になります。

ガロア理論は、代数学の中でも特に重要な分野であり、数学以外にも多くの応用があります。たとえば、ガロア理論は、暗号理論や符号理論、量子力学などにおいても重要な役割を果たしています。

暗号理論においては、ガロア理論を用いて、公開鍵暗号の安全性を保証することができます。具体的には、公開鍵暗号において、暗号化と復号化に用いられる鍵を、体の拡大における要素として扱います。このとき、ガロア理論によって、鍵の安全性を検証することができます。

符号理論においては、ガロア理論を用いて、誤り訂正符号の設計や解析を行うことができます。誤り訂正符号は、通信や記憶装置において、データの誤りを検出・訂正するために使用されます。ガロア理論によって、誤り訂正符号の性質や性能を解析することができます。

量子力学においては、ガロア理論を用いて、量子ビットのエンタングルメントの解析や、量子誤り訂正に関する研究に応用されます。具体的に

は、量子ビットは複素数体上のヒルベルト空間で表現されますが、ガロア理論を用いることで、このヒルベルト空間の拡大体や自己同型群を扱うことができます。また、量子誤り訂正においては、誤りが起こった際にどのような補正操作を行うかを決定するために、ガロア理論が用いられます。

さらに、ガロア理論は、代数方程式の解法においても応用されます。例えば、アーベル方程式の解法には、体の拡大とそのガロア群の構造を用いることができます。アーベル方程式とは、代数方程式が解けるような体の拡大が存在する場合に、その代数方程式がアーベル拡大であると言います。アーベル方程式に対しては、代数的に解法が与えられていますが、一般の代数方程式に対しては、一般には解法が与えられていません。

以上のように、ガロア理論は、数学以外の多くの分野において重要な役割を果たしています。特に、現代の暗号技術や量子コンピューターの研究においては、ガロア理論の応用が不可欠となっています。

4.2　代数的整数論

代数的整数論は、整数論の一分野であり、代数的構造を利用して整数の性質を研究するものです。代数的整数論では、代数体の整数環やその拡大環などが対象となります。

代数的整数論における重要な概念の一つが「ガウス整数」です。ガウス整数は、複素数のうち実数部分と虚数部分がともに整数であるもので、以下のように表されます。

$$\mathbb{Z}[i] = a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}$$

ガウス整数は、素因数分解において重要な役割を果たします。実際、ガウス整数環は、一意分解環であることが知られています。一意分解環とは、素因数分解が一意的に存在する環のことであり、ガウス整数環はその代表的な例です。

さらに、代数的整数論においては、イデアルという概念が重要です。イ

デアルとは、環の部分集合であり、加法と乗法について閉じているものです。代数的整数論では、イデアルが素イデアルであるかどうかが重要であり、それによって、素因数分解が成り立つことが示されます。

また、代数的整数論における重要な問題の一つが「二次残余」です。二次残余とは、ある整数 a が与えられたとき、二次方程式 $x^2 \equiv a \pmod{p}$ が解を持つかどうかを判定する問題です。ここで p は素数です。二次残余の判定には、オイラーの基準やクレーマーの法則などが用いられます。

さらに、代数的整数論における重要な定理の一つが「class number formula」です。class number formula とは、代数体の整数環の理想類群の位数を計算する公式であり、以下のように表されます。

$$h(-D) = \frac{1}{\pi}\sqrt{|\mathrm{Disc}(K)|}L(1, \chi_D)$$

ここで、$h(-D)$ は $-D$ を判別式とする代数体の整数環の理想類群の位数、K は $-D$ を判別式とする代数体、$\mathrm{Disc}(K)$ は代数体 K の判別式、$L(1, \chi_D)$ は Dirichlet L-関数であり、χ_D は $\mathbb{Z}$ 上の二次線形剰余記号です。

以上のように、代数的整数論では、整数論における基本的な概念を拡張し、新しい概念を導入することで、より深い理解を得ることができます。

練習問題として、以下の問題を提供します。

1. a が奇数であるとき、$x^2 - y^2 = a$ の整数解が存在するための必要十分条件を求めよ。
2. $\mathbb{Z}[i]$ のイデアル I が素イデアルであるための条件を求めよ。
3. p を奇素数とする。a が二次残余であるための必要十分条件を求めよ。

最後に、代数的整数論は暗号理論や符号理論など、情報セキュリティにおいて重要な応用分野の一つです。例えば、RSA 暗号においては、大きな素数を用いた暗号化が行われますが、その安全性は、代数的整数論に基

づく数学的な解法によって脅かされることがあります。また、楕円曲線暗号においても、代数的整数論が活用されています。これらの応用においては、代数的整数論の定理やアルゴリズムが重要な役割を果たしています。

4.3　表現論

表現論とは、群やリー群などの抽象代数的な対象に対して、その対象を線型空間上の線型変換によって表現することを扱う数学分野です。

まず、群の表現について考えます。群 G の表現とは、群 G が線型空間 V 上に作用するような線型写像 $\rho : G \to GL(V)$ のことです。すなわち、ρ は以下の条件を満たします。

・任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して、$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ が成り立つ。・任意の $v \in V$ に対して、$\rho(e)v = v$ が成り立つ。

ここで e は G の単位元、$GL(V)$ は V 上の可逆な線型変換の集合です。

特に、ρ が可約であるとは、V が直和分解 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ によって、G の任意の元 g に対して $\rho(g)$ がブロック上三角行列になるようなものを言います。このとき、V は不変空間 V_i の直和に分解されるため、ρ は各 V_i で異なる表現に分解されるということになります。

次に、リー群の表現について考えます。リー群 G の表現とは、G が線型空間 V 上に作用するような微分可能な写像 $\rho : G \to GL(V)$ のことです。すなわち、ρ は以下の条件を満たします。

・任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して、$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$ が成り立つ。・任意の $v \in V$ に対して、$\rho(e)v = v$ が成り立つ。・任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して、$\rho(\exp(x)) = \exp(\mathrm{ad}_x)$ が成り立つ。

ここで $\mathfrak{g}$ は G のリー代数、ad_x は $\mathfrak{g}$ 上の線型写像で、$\mathrm{ad}x(y) = [x, y]$ で定義されます。また、$\exp : \mathfrak{g} \to G$ は指数関数で、$\exp(x) = \sum n = 0^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ で定義されます。

表現論の主要な定理として、Maschke の定理があります。Maschke の定理は、有限群 G に対して、G の任意の表現は可約表現の直和で分解で

きるというものです。すなわち、任意の G の表現 $\rho : G \to GL(V)$ に対して、ある部分空間 $W_1, W_2, \ldots, W_k$ が存在して、$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ かつ、任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)(W_i) \subset W_i$ が成り立つようにできます。

また、表現論は物理学や化学などの自然科学分野でも応用されています。たとえば、原子核物理学では、核のスピンやパリティなどを表現論を用いて分類し、核反応の解析や核エネルギー準位の予測に応用されています。また、分子の対称性を表現論で解析することにより、分子の振る舞いや反応性などを理論的に解明することができます。

練習問題としては、以下のようなものが考えられます。

G を位数 n の有限群とし、G の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられたとき、V の次元が n であるとき、ρ が可約表現であるための必要十分条件を述べよ。

$G = \mathrm{SO}(3)$ を 3 次元回転群とする。G の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられたとき、ρ が可約表現であるための必要十分条件を述べよ。

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を 2×2 複素行列の行列式が 1 であるものからなる群とする。G の表現 $\rho : G \to GL(V)$ が与えられたとき、ρ が可約表現であるための必要十分条件を述べよ。

最後に、表現論は群論やリー群論などの代数学の基本的な分野であり、幅広い応用があります。特に物理学や化学においては、対称性が重要な役割を果たすため、表現論が理論的枠組みとして非常に重要な役割を果たしています。

第 5 章

解析学

5.1　ベクトル解析

ベクトル解析とは、ベクトル解析とは、3 次元空間内で定義されるベクトル関数についての微積分学的な手法を扱う学問分野です。ベクトル解析は、物理学や工学分野において、流体力学や電磁気学などの問題を解決するために不可欠な理論です。

ベクトル関数は、3 つの変数を持つベクトル値関数として定義されます。例えば、$\mathbf{F}(x,y,z) = \langle P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\rangle$ は、3 つのスカラー関数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ からなるベクトル関数です。ベクトル関数は、流体の速度場や電場、磁場などを表現するために用いられます。

ベクトル解析における主要な定理として、以下のようなものがあります。

・divergence の定理：$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{V\to 0} \dfrac{\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS}{V}$

この定理は、ベクトル場の発散に関するものであり、ある領域 V の内部から流れ出るベクトルの総和を表します。

・gradient の定理：$\displaystyle\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1)$

この定理は、スカラー場の勾配に関するものであり、スカラー場 $f(x,y,z)$ のある 2 点を結ぶ曲線 C 上の勾配ベクトルの積分値が、f

の値の差を表します。

・curl の定理：$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

この定理は、ベクトル場の回転に関するものであり、ある曲面 S の境界をなす曲線 C 上のベクトル場の総和が、曲面 S の内部での回転を表します。

また、ベクトル解析においてよく用いられる演算子には、grad、div、curl があります。grad は、スカラー場の勾配を表し、div は、ベクトル場の発散を表します。curl は、ベクトル場の回転を表します。

さらに、3 次元空間において、3 つのベクトルの外積により得られる 3 重積（triple product）もよく用いられます。3 つのベクトル $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$、$\mathbf{w}$ に対して、その 3 重積は以下のように定義されます。

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$

3 重積は、ベクトル解析において、回転の方向や平面の法線ベクトルなどを計算するために用いられます。

ベクトル関数の微積分においては、以下のような公式があります。

・線積分：$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\ dt$

この公式は、ベクトル場 $\mathbf{F}$ に沿った曲線 C 上での線積分を表します。

・面積分：$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v})\ dudv$

この公式は、ベクトル場 $\mathbf{F}$ に沿った曲面 S 上での面積分を表します。

練習問題としては、以下のようなものが考えられます。

1. ベクトル場 $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x^2, yz, xz \rangle$ の発散を求めよ。

2. ベクトル場 $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x, y, z \rangle$ に沿った曲線 C 上での線積分を求めよ。ただし、曲線 C は、点 $(0,0,0)$ から点 $(1,1,1)$ に至る直線である。

3. 曲面 S を以下のように定義する。

$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

ベクトル場 $\mathbf{F}(x,y,z) = \langle x, y, z \rangle$ に沿った曲面 S 上での面積分を求めよ。

ベクトル解析は、物理学や工学分野において、流体力学や電磁気学など

の問題を解決するために幅広く応用されています。

例えば、流体力学では、流れる流体を記述する速度ベクトル場の解析にベクトル解析が利用されます。Navier-Stokes 方程式と呼ばれる方程式の解析にもベクトル解析が欠かせません。

また、電磁気学では、電場や磁場を記述するベクトル場の解析にベクトル解析が利用されます。マクスウェル方程式と呼ばれる方程式の解析にもベクトル解析が欠かせません。

他にも、音響学や量子力学、天体物理学など、幅広い分野でベクトル解析が応用されています。

以上より、ベクトル解析は、物理学や工学分野をはじめとする多くの分野において、必要不可欠な数学的ツールであることがわかります。

5.2　フーリエ解析

フーリエ解析は、周期関数や信号の周波数成分を分析するための数学的手法であり、様々な分野で広く応用されています。本記事では、フーリエ解析の基本的な概念から応用事例までを解説します。

フーリエ解析の基礎となるのが、フーリエ級数です。周期関数 $f(x)$ が T の周期を持つとき、$f(x)$ を三角関数の無限級数で表すことができます。この無限級数をフーリエ級数といい、以下のように定義されます。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \tag{5.1}$$

ここで、a_n と b_n はフーリエ係数と呼ばれ、以下の式で与えられます。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}, dx \ b_n \quad = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}, dx \tag{5.2}$$

フーリエ級数は、実数の三角関数を用いた無限級数でしたが、これを複

素数の指数関数で表すこともできます。この無限級数を複素フーリエ級数といい、以下のように定義されます。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi x}{T}} \tag{5.3}$$

ここで、c_n は複素フーリエ係数と呼ばれ、以下の式で与えられます。

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-i\frac{2n\pi x}{T}}, dx \tag{5.4}$$

さらに、フーリエ変換という概念を導入することで、非周期的な信号についても周波数成分を分析することができます。フーリエ変換は、時間領域で表現された信号を周波数領域に変換することで、信号の周波数成分を表すことができます。フーリエ変換は以下のように定義されます。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}, dt \tag{5.5}$$

逆に、逆フーリエ変換を用いることで、周波数領域で表現された信号を時間領域に戻すことができます。逆フーリエ変換は以下のように定義されます。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}, d\omega \tag{5.6}$$

フーリエ解析には多くの計算問題がありますが、ここでは簡単な例題を紹介します。

1. 周期 2π の関数 $f(x) = x$ のフーリエ級数を求めよ。
2. 非周期関数 $f(x) = e^{-\alpha x}$ のフーリエ変換を求めよ。
3. 非周期関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ の逆フーリエ変換を求めよ。

フーリエ解析は、様々な分野で広く応用されています。代表的な応用分野として以下のものが挙げられます。

- 音声処理：音声信号は、波形として表現されますが、この波形をフーリエ解析することで、音声の周波数成分を分析することができます。この分析結果を用いて、音声の圧縮やフィルタリングなどが行われます。
- 映像処理：映像信号も、時間と空間の二次元波形として表現されますが、フーリエ解析によって周波数成分を分析することで、映像の圧縮やエフェクト処理などが行われます。
- 通信工学：通信信号は、周波数変調や振幅変調などによって変調されますが、これらの変調信号をフーリエ解析することで、通信信号の周波数帯域やノイズの影響などを分析することができます。

この節では、フーリエ解析の基礎的な概念から応用事例までを解説しました。フーリエ級数、フーリエ変換、逆フーリエ変換などの基本的な概念について学び、例題を通じて実践的な演習を紹介しました。また、音声処理、映像処理、通信工学など、フーリエ解析が応用される分野についても触れました。

フーリエ解析は、様々な分野で重要な役割を果たしています。そのため、数学や工学などの分野で学ぶことができます。また、実際にフーリエ解析を用いた応用事例を知ることで、理論と実践を結びつけることができます。

最後に、フーリエ解析は現代社会において欠かせない技術の一つであり、音声や映像、通信などの分野で幅広く活用されています。今後もさらに進化し、私たちの生活に貢献することが期待されます。

5.3　複素解析

複素解析は、複素数に関する解析学の分野であり、複素関数、複素関数の微分、積分、そしてコーシー・リーマン関係式、正則関数、コーシーの積分定理、留数定理などの重要な定理が含まれます。

複素数は、実数に対して、虚数単位 i を導入することで定義されます。複素関数 $f(z)$ は、複素数 z の定義域で定義される関数です。複素関数の微分は、以下のように定義されます。

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{5.7}$$

ここで、h は複素数であり、$h \to 0$ は h が原点に収束することを意味します。複素関数が微分可能であるためには、コーシー・リーマン関係式が成立する必要があります。つまり、以下の条件を満たす必要があります。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.8}$$

ここで、u と v は、複素関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ の実部と虚部です。

正則関数は、複素解析において重要な概念であり、次の条件を満たす複素関数 $f(z)$ です。

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} \tag{5.9}$$

つまり、$f(z)$ は複素平面上で微分可能であり、かつ、コーシー・リーマン関係式を満たす必要があります。

複素関数の積分は、リーマン積分とは異なり、道に沿った積分として定義されます。具体的には、C を複素平面上の道、$f(z)$ を C 上の複素関数として、

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \tag{5.10}$$

と定義されます。ここで、$z(t)$ は、C 上のパラメータ表示です。

コーシーの積分定理は、次のように述べられます。D を複素平面上の領域で、C を D の境界とする単純閉曲線、$f(z)$ を D 上の正則関数とすると、C 上での $f(z)$ の積分値は 0 になります。

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{5.11}$$

留数定理は、複素関数 $f(z)$ の特異点に対する積分を解析的に評価する方法を提供します。特異点とは、正則でない点のことで、例えば、極や分岐点などがあります。留数は、特異点周りの複素関数 $f(z)$ を Laurent 展開したときの、z^{-1} の係数です。

留数定理は、次のように述べられます。D を複素平面上の領域で、C を D の内側を囲む単純閉曲線、$f(z)$ を D 内で正則な複素関数、z_0 を D 内の特異点とすると、z_0 の留数 $Res_{z_0}(f)$ は次の式で与えられます。

$$Res_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz \tag{5.12}$$

複素解析は、物理学、電気工学、機械工学、統計力学、量子力学などの分野で広く応用されています。例えば、電磁気学では、複素解析を用いて、電場や磁場のポテンシャルを解析的に求めることができます。また、流体力学や音響学では、複素解析を用いて、流体の速度場や音波の伝播を解析的に評価することができます。

【練習問題】

$f(z) = z^2 + 2z + 2$ の特異点を求めよ。$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ の留数を求めよ。C を複素平面上の単位円周とし、$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ とする。$\oint_C f(z)dz$ を求めよ。【実生活への応用】複素解析は、現代物理学においても広く応用されています。例えば、量子力学では、複素解析を用いて、波動関数やグリーン関数の性質を解析的に評価することができます。また、場の量子論や弦理論などでも、複素解析が重要な役割を果たしています。さらに、数学的にも、複素解析は数多くの分野で応用されています。例えば、微分方程式の解法や、代数幾何学の研究などにも複素解析が用いられます。

また、複素解析の応用例として、金融工学におけるブラウン運動の理論があります。ブラウン運動は、ランダムウォークとも呼ばれ、株価の変動

などをモデル化するために広く用いられます。ブラウン運動の理論は、複素解析を用いて導出されることがあります。

さらに、複素解析はデザインや芸術においても応用されています。例えば、フラクタル図形の生成や、音楽の合成、映像の生成などにも複素解析が用いられます。

複素解析は、その広い応用範囲からもわかるように、非常に重要な分野であり、数学や物理学、工学、経済学、芸術など、多くの分野において必要不可欠な知識となっています。

第 6 章

幾何学

6.1　微分幾何学

微分幾何学は、微積分学と幾何学を統合した分野であり、座標系、曲線、曲面、曲率、捩率などを研究する数学の一分野である。

座標系は、空間内の点の位置を表すために使用される方法であり、通常は直交座標系が使用される。曲線は、空間内の点の集合であり、一般的にはパラメータ付き曲線として定義される。曲面は、空間内の点の集合であり、通常はパラメータ付き曲面として定義される。

曲率は、曲線や曲面の曲がり具合を測定するための指標であり、曲率半径 r を用いて以下のように定義される。

$$k = \frac{1}{r} = \frac{|\mathbf{T}'(s)|}{|\mathbf{r}'(s)|} \tag{6.1}$$

ここで、$\mathbf{r}(s)$ は曲線のパラメータ付き表示、$\mathbf{T}(s) = \dfrac{\mathbf{r}'(s)}{|\mathbf{r}'(s)|}$ は曲線の単位接ベクトルである。捩率は、曲線がどの程度ねじれているかを測定する指標であり、以下のように定義される。

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)) \cdot \mathbf{r}'''(s)}{|\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)|^2} \tag{6.2}$$

Frenet-Serret の公式は、曲線の性質を詳細に調べるための重要な道具であり、曲線上の点における接ベクトル $\mathbf{T}(s)$、法ベクトル $\mathbf{N}(s)$、従法ベクトル $\mathbf{B}(s)$ を定義する。

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{|\mathbf{r}'(s)|}, \quad \mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{|\mathbf{T}'(s)|}, \quad \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) \tag{6.3}$$

この公式により、曲線上の点における曲率 k と捩率 τ を次のように表すことができる。

$$k = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|, \quad \tau = \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} \tag{6.4}$$

曲線や曲面の性質を研究する際に、これらの公式は非常に役立ちます。

練習問題として、以下の問題を考えてみましょう。

1. 曲面 $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ 上の点 $(1,0,0)$ における法ベクトルを求めてください。
2. 曲線 $\mathbf{r}(s) = (s, \cos s, \sin s)$ 上の点 $(0,1,0)$ における従法ベクトルを求めてください。
3. 曲面 $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$ 上の点 $(1,0,1)$ における曲率と捩率を求めてください。

微分幾何学は、様々な分野に応用されています。例えば、物理学や力学、計算機科学、工学、統計学、生物学などで使用されています。物理学においては、微分幾何学は一般相対性理論において極めて重要な役割を果たしており、重力の理論などに応用されています。また、計算機科学においては、コンピュータグラフィックスにおける 3D モデリングや画像処理、機械学習におけるデータ解析などに応用されています。

6.2　位相幾何学

位相幾何学は、幾何学的オブジェクトを分類するための重要な数学分野です。具体的には、空間や図形の「形状」や「接続性」を定量化するために用いられます。

まず、位相の定義を示します。空間 X の位相とは、X の部分集合の集合 T であり、以下の条件を満たすものです。

1. X と $\emptyset$ は T に属する。
2. 有限個または無限個の開集合の和集合は開集合である。
3. 有限個の開集合の共通部分は開集合である。

同相写像とは、空間 X と Y の間の写像 $f : X \to Y$ で、f と f^{-1} がどちらも連続であるものを言います。このとき、X と Y は同相であるといいます。

ホモトピー集合は、空間 X から空間 Y への写像全体の集合を $Map(X,Y)$ とするとき、写像 $f, g \in Map(X,Y)$ がホモトピー同値であるとは、ある連続写像 $F : X \times [0,1] \to Y$ が存在して、$F(x,0) = f(x)$ かつ $F(x,1) = g(x)$ を満たすことを言います。このとき、f と g は「形」が同じと見なされます。

基本群は、空間 X のある点 $x_0 \in X$ に対して、x_0 から出発して「ループ」をつくることができる全ての写像の集合を $\Omega(X, x_0)$ とするとき、集合 $\Omega(X, x_0)$ に対して定義される群を言います。基本群は、空間の「穴の数」を表す量として捉えられます。具体的には、半径 r の円板 D^2 を考え、その境界 ∂D^2 上でループをつくると、このループを表す写像を基本群の元として考えることができます。n 個の穴を持つ空間の基本群は、$\mathbb{Z}^n$ となります。

例えば、S^1 と S^2 はそれぞれ基本群が $\mathbb{Z}$ と e（単位元のみからなる集合）であることが知られています。また、トーラス T^2 は基本群が $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

となります。

最後に、2 つの同相な空間の例を紹介します。まず、2 次元球面 S^2 と実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ は同相であることが知られています。ここで、実射影平面とは、実空間 $\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る半直線と、原点を通らない全ての直線を同一視して得られる空間です。この同一視は、ある直線 L に対して L と L を通る原点を通る半直線を同一視することで行われます。実射影平面は、表裏が同一視された平面と考えることもできます。

もう一つの例として、モビウス帯というものがあります。モビウス帯は、2 次元平面を一方向に捻じ曲げて得られる空間で、両端をくっつけた輪っかのような形をしています。モビウス帯は、自身を 1 回転させても同じ形にならず、このことから、モビウス帯は非同相な空間であることがわかります。具体的に、モビウス帯の基本群は $\mathbb{Z}$ となります。

練習問題として、以下の問題を提示します。

1. S^2 の基本群を求めよ。
2. モビウス帯とトーラス T^2 の基本群を比較し、その差異について考察せよ。

最後に、位相幾何学は実際の社会において、多くの分野で応用されています。例えば、トポロジー最適化と呼ばれる分野では、部品の形状を変えずに材料を減らすことができるような最適な形状を探索する問題が扱われます。また、ネットワーク解析では、位相的な手法が用いられ、複雑なネットワーク構造の解析や特徴抽出が行われます。更に、生物学や物理学、経済学などでも位相幾何学が応用され、新しい知見を生み出しています。

6.3　代数幾何学

代数幾何学とは、代数的な方法で多様体を研究する分野である。代数幾何学は数学の中でも特に幅広い応用分野を持ち、例えば暗号理論や符号理

論、制御理論、組み合わせ論などで応用されている。

まず、多様体の定義について説明する。k を体とする。n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}_k^n$ とは、k^n に点を無限個足して得られる空間のことである。k 上の n 次元多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ を考える。この環の元 f を k^n の点 $(a_1, \ldots, a_n)$ に代入した値 $f(a_1, \ldots, a_n)$ を f の $a_1, \ldots, a_n$ での値と呼ぶ。k^n 上のアフィン集合とは、k^n の部分集合で、ある $k[x_1, \ldots, x_n]$ の元 $f_1, \ldots, f_m$ によって次のように表されるものをいう。

$$V(f_1, ..., f_m) \coloneqq \{(a_1, ..., a_n) \in k^n)|f_1(a_1, ..., a_n) = ... = f_m(a_1, ..., a_n) = 0\}$$

これを、多項式 $f_1, \ldots, f_m$ の共通零点集合という。k^n 上のアフィン集合全体からなる集合を、k^n の Zariski 位相という。

代数多様体とは、Zariski 位相で定義される部分集合のことである。具体的には、ある $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアル I に対して、

$$V(I) \coloneqq \{(a_1, ..., a_n) \in k^n)|f(a_1, ..., a_n) = 0, \forall f \in I\}$$

と定義されるものを、k^n の代数的集合という。代数的集合の部分集合を代数的多様体という。代数多様体は、位相空間としての性質を持ち、解析幾何学における多様体と同様に考えられる。

代数幾何学において重要な概念として、グレブナー基底がある。グレブナー基底は、イデアル理論における基底となる基底で、イデアルの性質を簡単に表現できるものである。与えられた $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアル I に対して、グレブナー基底を計算することで、イデアル I が生成する代数的集合を計算することができる。

ベズーの定理は、代数幾何学における基本定理の一つである。これは、二つの代数的多様体の共通部分は、同様に代数的であるという定理である。すなわち、$V(I)$ と $V(J)$ をそれぞれ k^n の代数的集合とすると、

$$V(I) \cap V(J) = V(I + J)$$

が成り立つ。この定理は、多項式方程式の解の幾何学的な理解を提供する。

リーマン・ロッホの定理は、代数幾何学において非常に重要な定理である。この定理は、多様体上の正則関数全体の環というものを考えたとき、その微分が元の環に含まれるということを主張する。この定理は、代数幾何学と解析幾何学の接点となる定理であり、代数幾何学の基本的な道具となっている。

グロタンディークの定理は、代数幾何学においてさらに発展した理論を提供するものである。これは、ある代数的多様体 X について、その部分多様体が、その代数的情報から決定されるということを主張する定理である。この定理は、代数幾何学の研究において非常に重要な理論であり、特に代数多様体の局所的な性質を研究する際に用いられる。

以下に練習問題を提供する。

1. $k[x,y]$ のイデアル $(x^2+y^2-1, x+y-1)$ のグレブナー基底を求めよ。
2. $V(x^2+y^2+z^2-1) \subset \mathbb{R}^3$ を考える。この多様体の次元と、$V(x^2+y^2+z^2-1)$ を生成するイデアルの基底を求めよ。
3. X を n 次元代数多様体とする。X の k-有理点とは、代数閉体 k 上の代数多様体 X の部分多様体 Y であって、Y が有限体 k 上の点の集合と同型であるようなものである。k が有限体である場合、代数多様体 X の有理点の個数は有限であることを示せ。

これらの問題は、代数幾何学の基本的な考え方や定理を理解するための問題である。

最後に、代数幾何学が実際の社会においてどのように応用されているかについて触れてみる。代数幾何学は、多くの工学的応用において必要不可欠な分野であり、例えば制御理論、通信理論、機械学習、暗号理論などの分野で応用されている。特に、楕円曲線暗号の理論は代数幾何学的な手法を用いて構成されており、現代の情報セキュリティに欠かせない技術と

なっている。

また、代数幾何学は、数学的物理学においても重要な役割を果たしている。例えば、弦理論や量子場理論などの物理学の研究において、代数幾何学的なアプローチが用いられている。また、最近では、代数幾何学的な手法を用いたトポロジー学の研究が注目されている。

さらに、代数幾何学は、数学自体の発展にも大きな影響を与えている。代数幾何学における問題や手法は、数学の他の分野にも影響を与えており、例えば数論や表現論などの分野でも重要な研究テーマとなっている。